

Họ và tên thí sinh:

Mã đề HSG12-3

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 19. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho tam giác ABC có $AB = AC = \frac{2}{3}BC = 2$. Tính độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác ABC .

- A. $r = \sqrt{7}$. B. $r = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. C. $r = \frac{3\sqrt{7}}{14}$. D. $r = \frac{6\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.

Gọi p là nửa chu vi $\Rightarrow p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2+2+3}{2} = \frac{7}{2}$.

Diện tích tam giác

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{7}{2}\left(\frac{7}{2}-2\right)\left(\frac{7}{2}-2\right)\left(\frac{7}{2}-3\right)} = \frac{3\sqrt{7}}{4}.$$

Vậy

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{4}}{\frac{7}{2}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}.$$

Chọn đáp án **C** \square

Câu 2. Cho mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau

Nhóm	$[0; 10)$	$[10; 20)$	$[20; 30)$	$[30; 40)$
Tần số	3	7	2	9

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

- A. $[30; 40)$. B. $[20; 30)$. C. $[10; 20)$. D. $[0; 10)$.

Lời giải.

Cỡ mẫu $n = 21$. Ta có

$$x_1; \dots; x_3 \in [0; 10)$$

$$x_4; \dots; x_{10} \in [10; 20)$$

$$x_{11}; x_{12} \in [20; 30)$$

$$x_{13}; \dots; x_{21} \in [30; 40)$$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{x_5 + x_6}{2} \in [10; 20)$.

Chọn đáp án **C** \square

Câu 3. Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

Quãng đường	$[2,7; 3,0)$	$[3,0; 3,3)$	$[3,3; 3,6)$	$[3,6; 3,9)$	$[3,9; 4,2)$
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 11,62.

B. 3,39.

C. 0,36.

D. 0,1314.

Lời giải.

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau

Nhóm	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Giá trị đại diện	2,85	3,15	3,45	3,75	4,05
Tần số	3	6	5	4	2

Số trung bình của mẫu số liệu là

$$\bar{x} = \frac{1}{20} \cdot (2,85 \cdot 3 + 3,15 \cdot 6 + 3,45 \cdot 5 + 3,75 \cdot 4 + 4,05 \cdot 2) = 3,39.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S^2 = \frac{1}{20} (3 \cdot 2,85^2 + 6 \cdot 3,15^2 + 5 \cdot 3,45^2 + 4 \cdot 3,75^2 + 2 \cdot 4,05^2) - 3,39^2 = 0,1314.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a . Góc giữa hai vectơ \overrightarrow{SB} và \overrightarrow{AC} bằng

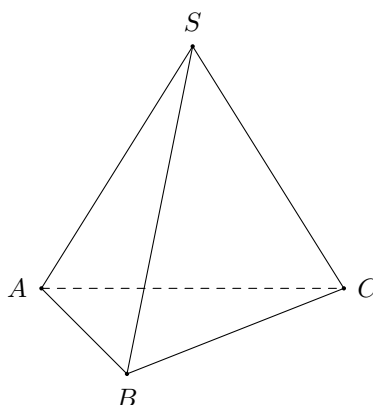
A. 60° .

B. 120° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải.



Ta có

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = \frac{-a^2}{2}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{ (tam giác } ABC \text{ vuông tại } A).$$

Ta có

$$\cos(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{SB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC}}{a^2} = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{a^2} = \frac{\frac{-a^2}{2} + 0}{a^2} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy góc giữa hai vectơ \overrightarrow{SB} và \overrightarrow{AC} bằng 120° .

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 5. Cho phương trình $\sqrt{3} \tan 2x = 3$ có nghiệm x_0 . Khi đó $\cos x_0$ nhận giá trị là

A. $\pm \frac{1}{2}$.

B. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2}$.

C. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{3} \tan 2x = 3 \Leftrightarrow \tan 2x = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $x_0 \in \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi; \frac{7\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Vậy $\cos x_0 \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2} \right\}$.

Chọn đáp án **(B)** \square

Câu 6. Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $\log(2x^2 + 3) > \log(x^2 + mx + 1)$ có tập nghiệm là \mathbb{R} .

A. $-2 < m < 2$.

B. $m < 2\sqrt{2}$.

C. $m < 2$.

D. $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Bất phương trình $\log(2x^2 + 3) > \log(x^2 + mx + 1)$ có tập nghiệm là \mathbb{R} tương đương

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + mx + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x^2 + 3 > x^2 + mx + 1, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + mx + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 - mx + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ m^2 - 8 < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & -2 < m < 2. \end{aligned}$$

Vậy $-2 < m < 2$.

Chọn đáp án **(A)** \square

Câu 7. Một nông dân dự định trồng khoai tây và đậu xanh trên diện tích 8 ha. Trên diện tích mỗi ha, nếu trồng khoai tây thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng, nếu trồng đậu xanh thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng. Giả sử trên diện tích 8 ha, hộ nông dân trồng a ha khoai tây và b ha đậu xanh để thu được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180. Tính $S = 2a + 4b$.

A. $S = 26$.

B. $S = 28$.

C. $S = 20$.

D. $S = 14$.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số ha trồng khoai tây và đậu xanh.

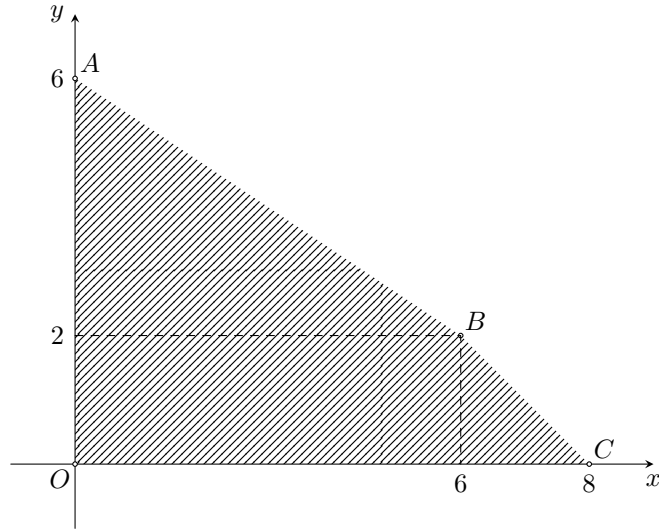
Điều kiện $0 \leq x \leq 8$ và $0 \leq y \leq 8$.

Tổng diện tích trồng hai loại cây là $x + y$ ha; tổng số công cần dùng là $20x + 30y$ (công).

Số tiền thu được là $T(x, y) = 3x + 4y$ triệu đồng.

$$\text{Ta có hệ bất phương trình } \begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \end{cases}.$$

Miền nghiệm của hệ trên là miền tứ giác $OABC$ (phần gạch chéo, tính cả biên) với $O(0; 0)$, $A(0; 6)$, $B(6; 2)$ và $C(8; 0)$.



Số tiền thu được $T(x, y)$ đạt giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $OABC$. Ta có $T(0, 0) = 0$, $T(0, 6) = 24$, $T(6, 2) = 26$ và $T(8, 0) = 24$.

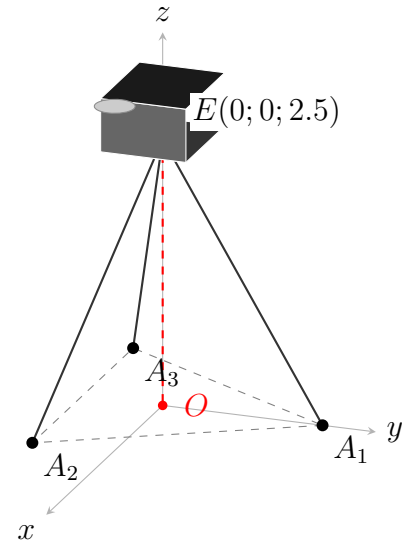
Khi đó giá trị lớn nhất của $T(x, y)$ bằng 26 (triệu đồng) với $x = 6$, $y = 2$.

Vậy $S = 2a + 4b = 20$.

Chọn đáp án **C** \square

Câu 8. Một chiếc máy ảnh được đặt trên giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0; 0; 8)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0; 1; 0)$, $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{2}; 0\right)$, $A_3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{2}; 0\right)$. Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 240N. Tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ \vec{F}_1 là

- A. $\vec{F}_1 = (0; 10; -80)$. B. $\vec{F}_1 = (0; 10; 80)$.
C. $\vec{F}_1 = (0; -10; -80)$. D. $\vec{F}_1 = (10; 0; -80)$.



Lời giải.

Ta có $\vec{EA}_1 = (0; 1; -8)$, $\vec{EA}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{2}; -8\right)$, $\vec{EA}_3 = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{2}; -8\right)$ nên $EA_1 = EA_2 = EA_3 = \sqrt{65}$.

Mặt khác, vì đèn cân bằng và trọng lực của đèn tác dụng đều lên 3 chân của giá đỡ nên $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$.

Do đó $\vec{F}_1 = k\vec{EA}_1 = (0; k; -8k)$, $\vec{F}_2 = k\vec{EA}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k; \frac{-1}{2}k; -8k\right)$, $\vec{F}_3 = k\vec{EA}_3 = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}k; \frac{-1}{2}k; -8k\right)$

$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0; 0; -24k)$.

Mà $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P} = (0; 0; -240) \Rightarrow -24k = -240 \Rightarrow k = 10$.

Vậy $\vec{F}_1 = (0; 10; -80)$.

Chọn đáp án **A** \square

Câu 9. Cho các số thực a ; b ; c thỏa mãn $c^2 + a = 8$ và $\lim (\sqrt{an^2 + bn} - cn) = 2$. Hãy tính $P = a + b + c$.

- A. 14. B. 6. C. 12. D. -24.

Lời giải.

Từ giả thiết $\lim (\sqrt{an^2 + bn} - cn) = 2$ suy ra $a > 0, c > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim (\sqrt{an^2 + bn} - cn) = 2 &\Leftrightarrow \lim \frac{(a - c^2)n^2 + bn}{\sqrt{an^2 + bn} + cn} = 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - c^2 = 0 & (1) \\ \frac{b}{\sqrt{a} + c} = 2. & (2) \end{cases}\end{aligned}$$

Mà $c^2 + a = 8$ nên từ (1) suy ra $a = c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$.

Thay $c = 2$ vào (2) ta được $b = 8$.

Vậy $P = a + b + c = 14$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3; 0; 8)$, $D(-5; -4; 0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $|\vec{CA} + \vec{CB}|$ bằng

A. $5\sqrt{10}$.

B. $6\sqrt{10}$.

C. $10\sqrt{5}$.

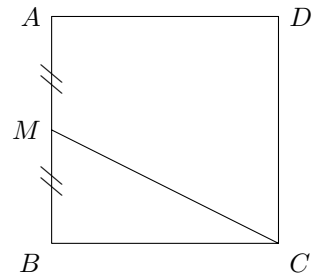
D. $10\sqrt{6}$.

Lời giải.

$$\vec{BD} = (-8; -4; -8) \Rightarrow BD = 12 \Rightarrow AB = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow MC = 3\sqrt{10}$.

$$|\vec{CA} + \vec{CB}| = |2\vec{CM}| = 2CM = 6\sqrt{10}.$$



Chọn đáp án **(B)** □

Câu 11. Một đa giác đều có số đường chéo gấp đôi số cạnh. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 8.

Lời giải.

Giả sử đa giác lồi có n cạnh ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$).

$$\text{Khi đó số đường chéo của đa giác là } C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

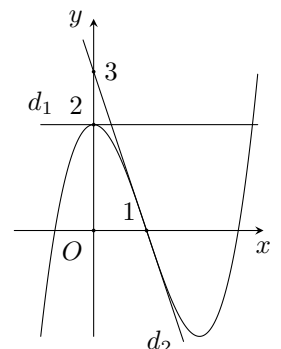
$$\text{Theo đề bài ta có } \frac{n(n-3)}{2} = 2n \Leftrightarrow n^2 - 7n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 & (\text{loại}) \\ n = 7 & (\text{nhận}). \end{cases}$$

Vậy đa giác có 7 cạnh thì số đường chéo gấp đôi số cạnh.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 12.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên, d_1 và d_2 là các tiếp tuyến của (C) . Dựa vào hình vẽ, hãy tính giá trị biểu thức $P = 3f'(0) + 2f'(1)$.



A. $P = 6$.

B. $P = -6$.

C. $P = 3$.

D. $P = 12$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, suy ra $\begin{cases} d_1: y = 2 \Rightarrow f'(0) = 0 \\ d_2: y = -3x + 3 \Rightarrow f'(1) = -3. \end{cases}$

Vậy $P = 3f'(0) + 2f'(1) = -6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hình lăng trụ đứng tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và BC' bằng

A. $\frac{a}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải.

Gọi H, M lần lượt là hình chiếu vuông góc của C và I lên BC' .

Khi đó ta có $CH \perp BC'$ và $IM \perp BC'$.

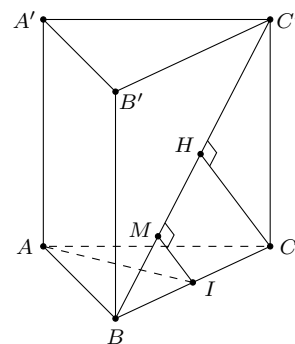
Mặt khác $AI \perp (BCC'B')$ nên $AI \perp MI$.

Suy ra $d(AI, BC') = MI = \frac{1}{2}CH$.

Tam giác BCC' vuông tại C nên ta có $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2a)^2} = \frac{5}{4a^2}$.

Suy ra $AH = \sqrt{\frac{4a^2}{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Vậy $d(AI, BC') = \frac{a}{\sqrt{5}}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $AB = AD = AC$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} . Chọn mệnh đề đúng?

A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$.

B. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

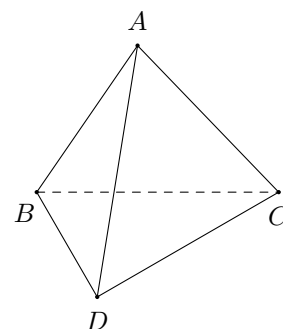
C. $\varphi = 60^\circ$.

D. $\varphi = 90^\circ$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB \cdot AD \cos \widehat{DAB} - AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{CAB} = 0. \\ &\Rightarrow \varphi = 90^\circ. \end{aligned}$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho A, B là các biến cố thỏa mãn $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,35$; $P(A) = 0,25$; $P(B) = 0,6$. Giá trị của $P(A | B)$ bằng

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{7}{15}$.

Lời giải.

Ta có

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) P(\overline{B} | \overline{A}) \Rightarrow P(\overline{B} | \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{0,35}{0,75} = \frac{7}{15}.$$

Suy ra

$$P(B | \overline{A}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B | A) P(A) + P(B | \overline{A}) P(\overline{A}) \\ \Rightarrow P(B | A) &= \frac{P(B) - P(B | \overline{A}) P(\overline{A})}{P(A)} = \frac{0,6 - \frac{8}{15} \cdot 0,75}{0,25} = 0,8. \end{aligned}$$

Theo công thức Bayes, ta được

$$P(A | B) = \frac{P(A) P(B | A)}{P(B)} = \frac{0,25 \cdot 0,8}{0,6} = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 16. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đứng có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của $BC, BB', A'B'$. Mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

- A. (BPC') . B. $(B'PC)$. C. (ABC) . D. $(ABB'A')$.

Lời giải.

Trong tam giác $\triangle BB'C$, MN là đường trung bình $\Rightarrow MN \parallel B'C$, mà tứ giác $BCC'B'$ là hình vuông nên $B'C \perp BC' \Rightarrow MN \perp BC'$.

Vì tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BB' \perp (ABC) \\ BB' \subset (BCC'B') \end{cases} \Rightarrow (ABC) \perp (BCC'B').$

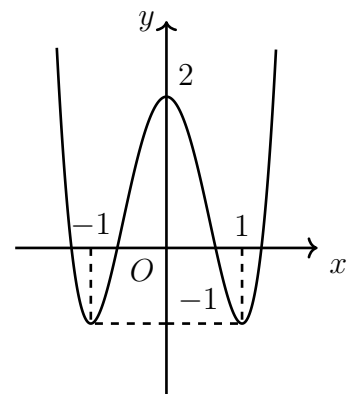
Mà $\begin{cases} (ABC) \cap (BCC'B') = BC \\ AM \perp BC \\ AM \subset (ABC) \end{cases}$
 $\Rightarrow AM \perp (BCC'B') \Rightarrow AM \perp BC'.$

Ta có $\begin{cases} BC' \perp MN \\ BC' \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (AMN)$, mà $BC' \subset (BPC') \Rightarrow (AMN) \perp (BPC').$

Chọn đáp án **A** □

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020x}{f(x)[f(x) - m]}$ có tổng số 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.



Lời giải.

Ta có $g(x)$ là hàm phân thức hữu tỷ với bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$, do đó đồ thị hàm số $g(x)$ luôn có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

$$\text{Phương trình } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1; -2 < x_1 < -1 \\ x = x_2 \in (-1; 0) \\ x = x_3 \in (0; 1) \\ x = x_4 \in (1; 2). \end{cases}$$

Ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt đều khác 0 nên $x = x_1, x = x_2, x = x_3, x = x_4$ là 4 tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy để đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng thì phương trình $f(x) = m$ phải có đúng 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác với 4 nghiệm $x_i (i = \overline{1, 4}) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \neq 0 \end{cases} \text{ mà } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m = 1.$$

Chọn đáp án **(B)** \square

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$

như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) + \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8} - \frac{3x}{8}$.

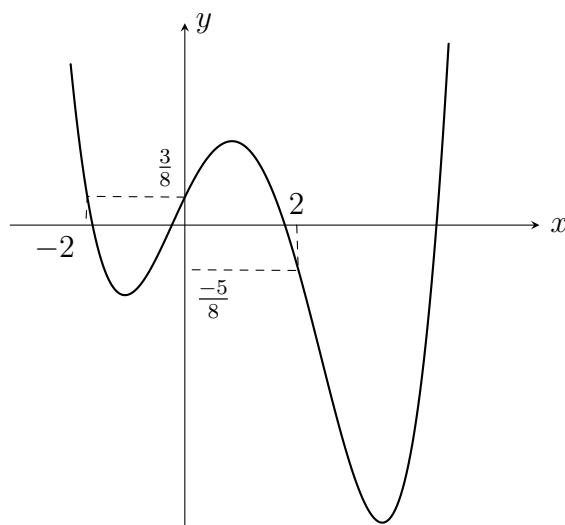
Bất phương trình $g(x) \leq m$ có nghiệm trên đoạn $[-2; 2]$ khi và chỉ khi

A. $m \geq g(-1)$.

B. $m \geq g(-2)$.

C. $m \geq g(0)$.

D. $m \geq g(2)$.

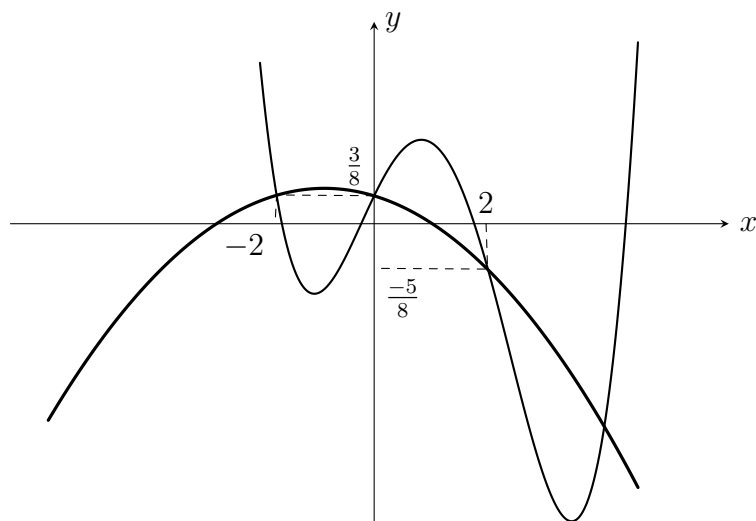


Lời giải.

Ta có $g(x) = f(x) + \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8} - \frac{3x}{8}$.

$$g'(x) = f'(x) + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{3}{8}.$$

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$, ta có
$$\begin{cases} f'(-2) = \frac{3}{8} \\ f'(0) = \frac{3}{8} \\ f'(2) = -\frac{5}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(2) = 0 \\ g'(0) = 0 \\ g'(2) = 0. \end{cases}$$



Vẽ parabol $(P): y = -\frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{3}{8}$ trên cùng hệ trục tọa độ.

(P) đi qua các điểm $\left(-2; \frac{3}{8}\right), \left(0; \frac{3}{8}\right), \left(2; -\frac{5}{8}\right)$ và có đỉnh $I\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Dựa vào đồ thị trên ta có bảng biến thiên của hàm $y = g(x)$ như sau

x	-2	0	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$g(-2)$	$g(0)$	$g(2)$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất cần tìm là $g(0)$.

Bất phương trình $g(x) \leq m$ có nghiệm trên đoạn $[-2; 2]$ khi và chỉ khi $\min_{[-2; 2]} g(x) \leq m \Leftrightarrow g(0) \leq m$.

Chọn đáp án **C** \square

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , G là trọng tâm tam giác SOD . Một mặt phẳng (P) qua G và cắt các đường thẳng SA, SC, SD theo thứ tự tại I, J, K . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = 13\frac{SA^2}{SI^2} + \frac{SC^2}{SJ^2} + 4\frac{SD^2}{SK^2} - 12\frac{SA}{SI}$ bằng \overline{ab} với $(a; b \in \mathbb{N})$. Tính $a + b$.

A. $a + b = 4$.

B. $a + b = 3$.

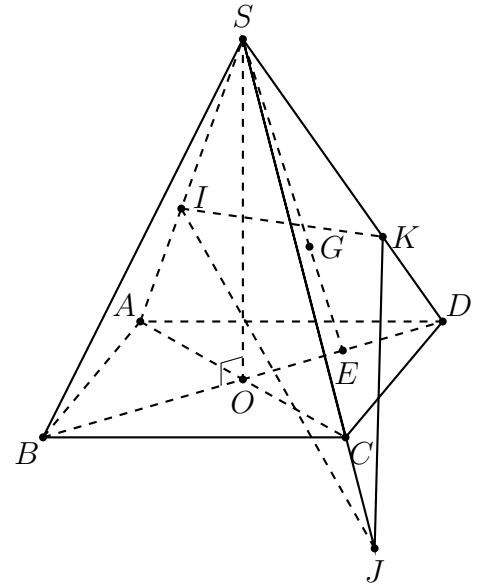
C. $a + b = 5$.

D. $a + b = 6$.

Lời giải.

Đặt $x = \frac{SA}{SI}$, $y = \frac{SC}{SJ}$, $z = \frac{SD}{SK}$ thì
 $Q = 13x^3 + y^2 + 4z^2 - 12x = 4x^2 + y^2 + 4z^2 + 9x^2 - 12x = 4x^2 + y^2 + 4z^2 + (3x - 2)^2 - 4$ với $x, y, z > 0$.
 Ta có

$$\begin{aligned}\vec{SG} &= \frac{2}{3}\vec{SE} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{SO} + \vec{SD}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{SO} + \frac{1}{3}\vec{SD} = \frac{1}{6}\vec{SA} + \frac{1}{6}\vec{SC} + \frac{1}{3}\frac{SD}{SK}\vec{SK} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{SA}{SI}\vec{SI} + \frac{1}{6} \cdot \frac{SC}{SJ}\vec{SJ} + \frac{1}{3}z\vec{SK} \\ &= \frac{1}{6}x\vec{SI} + \frac{1}{6}y\vec{SJ} + \frac{1}{3}z\vec{SK}.\end{aligned}$$



Vì G, I, J, K đồng phẳng nên $\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}z = 1 \Leftrightarrow x + y + 2z = 6$.

Khi đó $6^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2x + 1 \cdot y + 1 \cdot 2x\right)^2 \leq \left(\frac{1}{4} + 1 + 1\right)(4x^2 + y^2 + 4z^2) \Rightarrow 4x^2 + y^2 + 4z^2 \geq 16$
 đồng thời $(3x - 2)^2 - 4 \geq -4$.

Vì vậy $Q = 4x^2 + y^2 + 4z^2 + (3x - 2)^2 - 4 \geq 16 - 4 = 12$. Hay $Q_{\min} = 12 = \overline{ab} \Rightarrow a + b = 3$.

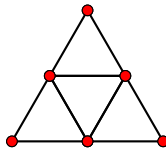
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ \frac{2x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{2z}{1} \\ x + y + 2z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{8}{3} \\ z = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

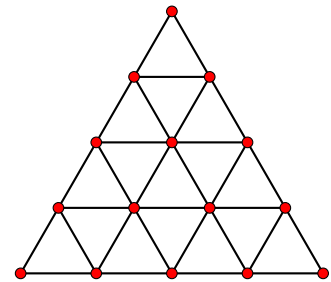
Câu 20. Người ta dùng các que diêm có độ dài bằng nhau để xếp thành các hình tam giác đều, biết cạnh của tam giác đều ở hình thứ $n + 1$ gấp đôi cạnh của tam giác đều ở hình thứ n (với n là số nguyên dương) như hình vẽ dưới đây.



Hình thứ 1



Hình thứ 2



Hình thứ 3

Để xếp hình thứ 15 thì cần dùng a que diêm. Số ước nguyên của a là

- A.** 240. **B.** 480. **C.** 224. **D.** 448.

Lời giải.

Gọi u_n là độ dài cạnh (tính bằng đơn vị que diêm) của tam giác đều ở hình thứ n . Theo đề bài, cạnh của hình sau gấp đôi hình trước, nên dãy số (u_n) lập thành một **cấp số nhân** với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$. Công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân là:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Với hình thứ 15, độ dài cạnh của tam giác là:

$$u_{15} = 2^{15-1} = 2^{14}.$$

Số que diêm cần dùng để xếp kín một tam giác đều cạnh k được tính theo công thức $S_k = \frac{3k(k+1)}{2}$.

Thay $k = u_{15} = 2^{14}$ vào công thức, ta có số que diêm a là:

$$a = \frac{3 \cdot 2^{14} \cdot (2^{14} + 1)}{2} = 3 \cdot 2^{13} \cdot (2^{14} + 1).$$

Ta có $2^{14} + 1 = 16384 + 1 = 16385$. Phân tích số này ra thừa số nguyên tố:

$$16385 = 5 \cdot 3277 = 5 \cdot 29 \cdot 113.$$

Suy ra dạng phân tích tiêu chuẩn của a là:

$$a = 2^{13} \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 29^1 \cdot 113^1.$$

Số lượng các ước nguyên dương của a là:

$$(13+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 14 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 224.$$

Vì đề bài hỏi số **ước nguyên** (bao gồm cả ước âm và ước dương), nên kết quả là:

$$224 \cdot 2 = 448.$$

Chọn đáp án **D** □

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu hỏi, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$ và D thuộc trục tung. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đúng	Sai
a) Kết quả tích có hướng $[\vec{AB}, \vec{AC}] = (0; 4; -2)$.		X
b) Diện tích tam giác ABC bằng 2.		X
c) Chiều cao kẻ từ A của tam giác ABC bằng $\sqrt{30}$.		X
d) Nếu điểm $D(0; 8; 0)$ thì thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 5.	X	

Lời giải.

a) **S** Ta có $\begin{cases} \vec{AB} = (1; -1; 2) \\ \vec{AC} = (0; -2; 4) \end{cases} \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (0; -4; -2).$

b) **S** $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{(0)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$

c) **S** $\vec{BC} = (-1; -1; 2) \Rightarrow BC = \sqrt{6}.$
Suy ra $AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{\sqrt{30}}{3}.$

d) **D** Gọi $D(0; y; 0) \in Oy.$
Ta có $V = \frac{1}{6} |[\vec{AB} \cdot \vec{AC}] \cdot \vec{AD}| = 5 \Leftrightarrow |-4(y-1) - 2| = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 \\ y = 8. \end{cases}$
Vậy $D(0; 8; 0)$ hoặc $D(0; -7; 0).$

Chọn đáp án

a sai	b sai	c sai	d đúng
-------	-------	-------	--------

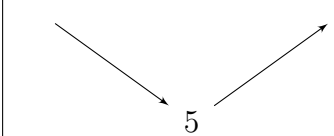
 □

Câu 2. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$, trong đó t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Khi đó

Phát biểu	Đúng	Sai
a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ (s) bằng 8 m/s.		X
b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được 13 m, vận tốc khi đó bằng 8 m/s.	X	
c) Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là 5 m/s.	X	
d) Gia tốc tại thời điểm chất điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng 2 m/s ² .		X

Lời giải.

- a) **S** Vận tốc $v(t) = 3t^2 - 6t + 8$.
Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ s bằng $v(3) = 17$ m/s.
- b) **D** Chất điểm di chuyển được 13 m $\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 8t + 1 = 13 \Leftrightarrow t = 2$ (s).
Vận tốc khi đó bằng $v(2) = 8$ m/s.
- c) **D** Vận tốc $v(t) = 3t^2 - 6t + 8$.
 $v'(t) = 6t - 6 \Leftrightarrow t = 1$.
Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
v'	-	0	+
v			

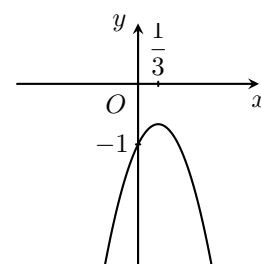
Vận tốc nhỏ nhất bằng 5 m/s tại thời điểm $t = 1$ (s).

- d) **S** Gia tốc $a(t) = 6t - 6$. Gia tốc tại thời điểm $t = 1$ (s) bằng $a(1) = 0$.

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b đúng ☐ c đúng ☐ d sai ☐

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a; b; c; d \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Phát biểu	Đúng	Sai
a) $c < 0$.	X	
b) $f(1) - f(0) = -1$.	X	
c) $a > 0$.		X
d) $a + b = -1$.		X



Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ căn cứ vào đồ thị hàm $y = f'(x)$ ta có

- a) **D** Đồ thị giao với trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $c = -1 < 0$.

b) **D** Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$.

$$\text{Từ đồ thị hàm số suy ra } \begin{cases} f'(0) = -1 \\ f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a + b = 0. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } f(1) - f(0) = (a + b + c + d) - d = a + b + c = -1.$$

c) **S** Đồ thị là một parabol quay bề lõm xuống nên $a < 0$.

d) **S** Ta có $f''(x) = 6ax + 2b = 0$ mà $f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2a + 2b = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$.

Chọn đáp án

a đúng	b đúng	c sai	d sai
--------	--------	-------	-------

 ☐

Câu 4. Một thống kê cho thấy, ở một quốc gia X, tỉ lệ người mới bị mắc bệnh hiểm nghèo Y là 0,6%. Ông M đi xét nghiệm bệnh hiểm nghèo Y và nhận được kết quả âm tính. Biết rằng, nếu một người mắc bệnh hiểm nghèo Y thì khi xét nghiệm cho kết quả là 95% dương tính; nếu một người không mắc bệnh hiểm nghèo Y thì khi xét nghiệm cho kết quả là 98% âm tính. Gọi A là biến cố “Ông M mắc bệnh hiểm nghèo Y” và B là biến cố “Xét nghiệm bệnh hiểm nghèo Y cho kết quả dương tính”.

Phát biểu	Đúng	Sai
a) Trước khi tiến hành xét nghiệm, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của ông M là 99,4%.	X	
b) Biến cố “Ông M không mắc bệnh hiểm nghèo Y” với điều kiện “xét nghiệm cho kết quả âm tính” là $\bar{A} \bar{B}$.	X	
c) $P(\bar{A} \bar{B}) = 99,98\%$.		X
d) Sau khi xét nghiệm cho kết quả âm tính, xác suất để ông M không mắc bệnh hiểm nghèo Y cao hơn lúc trước khi ông M xét nghiệm.	X	

Lời giải.

a) **D** Biến cố “Ông M không mắc bệnh hiểm nghèo Y” là \bar{A} .

Ta có $P(A) = 0,006$, suy ra $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,994$.

b) **D** Biến cố “Xét nghiệm bệnh hiểm nghèo Y cho kết quả âm tính” là \bar{B} .

Vậy biến cố “Ông M không mắc bệnh hiểm nghèo Y với điều kiện xét nghiệm cho kết quả âm tính” là $\bar{A} | \bar{B}$.

c) **S** Theo công thức Bayes ta có

$$P(\bar{A} | \bar{B}) = \frac{P(\bar{B} | \bar{A}) \cdot P(\bar{A})}{P(\bar{B} | \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) + P(\bar{B} | A) \cdot P(A)}. \quad (*)$$

Ta có $P(\bar{B} | \bar{A}) = 0,98$ và $P(\bar{B} | A) = 1 - 0,95 = 0,05$, thay vào công thức (*) ta được

$$P(\bar{A} | \bar{B}) = \frac{0,98 \cdot 0,994}{0,98 \cdot 0,994 + 0,05 \cdot 0,006} \approx 0,9997.$$

d) **D** Ta có $P(\bar{A} | \bar{B}) \approx 0,9997 > P(\bar{A}) = 0,994$, nghĩa là sau khi xét nghiệm cho kết quả âm tính, xác suất để ông M không mắc bệnh hiểm nghèo Y cao hơn lúc trước khi ông M xét nghiệm.

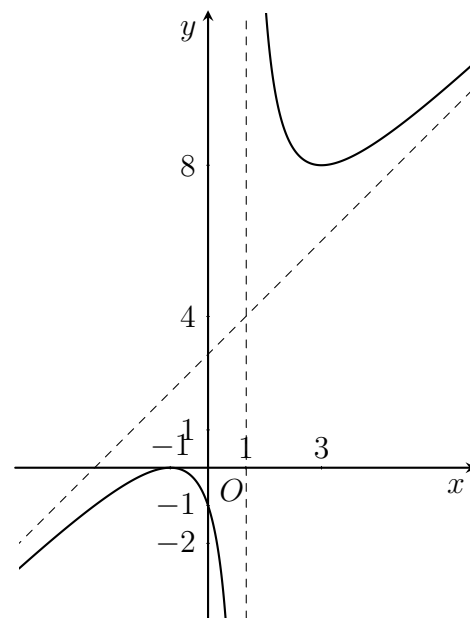
Chọn đáp án

a đúng	b đúng	c sai	d đúng
--------	--------	-------	--------

 ☐

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có đồ thị như hình vẽ.

Phát biểu	Đúng	Sai
a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên từng khoảng xác định $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.		X
b) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.	X	
c) Đồ thị hàm số $f(x)$ ở hình bên là của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$.	X	
d) Điểm M trên đồ thị hàm số $f(x)$ có khoảng cách đến I là nhỏ nhất (với I là giao điểm của hai tiệm cận) với hoành độ dương là $\sqrt{2 + \sqrt{2}} + 1$.	X	



Lời giải.

- a) **S** Vì quan sát trên đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.
- b) **Đ** Vì quan sát trên đồ thị ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.
- c) **Đ** Ta khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = x + 3 + \frac{4}{x - 1}$.

- $y' = 1 - \frac{4}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x + 3 + \frac{4}{x - 1} \right) = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x + 3 + \frac{4}{x - 1} \right) = +\infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - (x + 3)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x - 1} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - (x + 3)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 1} = 0.$$

Do đó, đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 3$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	8	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-1; 1)$ và $(1; 3)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ với $y_{CD} = 0$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ với $y_{CT} = 8$.

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0; -1)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $(1; 4)$ của hai tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.

Đồ thị nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai tiệm cận này làm hai trục đối xứng.

- d) **D** Đồ thị trong hình vẽ là của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = x + 3 + \frac{4}{x - 1}$.

Có $I(1; 4)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Gọi $M(x; y) \in (C)$. Khi đó, $\overrightarrow{IM} = (x - 1; y - 4)$.

$$\begin{aligned}
 IM^2 &= (x - 1)^2 + (y - 4)^2 \\
 &= (x - 1)^2 + \left(x + 3 + \frac{4}{x - 1} - 4\right)^2 \\
 &= (x - 1)^2 + \left(x - 1 + \frac{4}{x - 1}\right)^2 \\
 &= (x - 1)^2 + (x - 1)^2 + 8 + \left(\frac{4}{x - 1}\right)^2 \\
 &= 2(x - 1)^2 + \frac{16}{(x - 1)^2} + 8
 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$IM^2 \geq 2\sqrt{32} + 8 = 8\sqrt{2} + 8 \Rightarrow IM \geq \sqrt{8\sqrt{2} + 8}.$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{aligned}
 2(x - 1)^2 &= \frac{16}{(x - 1)^2} \\
 \Leftrightarrow (x - 1)^4 &= 8 \\
 \Leftrightarrow x - 1 &= \pm 2\sqrt{2} \\
 \Leftrightarrow x &= \pm 2\sqrt{2} + 1.
 \end{aligned}$$

Điểm M trên đồ thị hàm số $f(x)$ có khoảng cách đến I là nhỏ nhất (với I là giao điểm của hai tiệm cận) là $\min IM = \sqrt{8\sqrt{2} + 8}$ với hoành độ dương là $\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1$.

Chọn đáp án

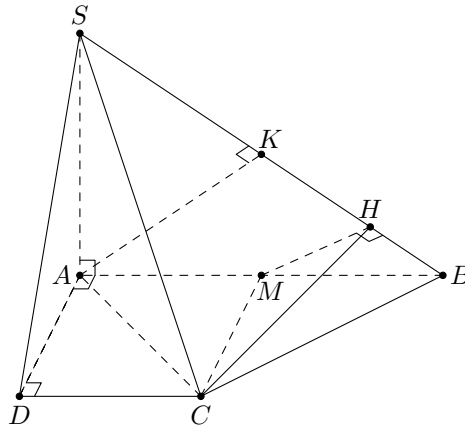
a sai	b đúng	c đúng	d đúng
-------	--------	--------	--------

 ☐

Câu 6. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , biết $AB = 2CD = 2AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$, $SC = a\sqrt{6}$.

Phát biểu	Đúng	Sai
a) Hai đường thẳng SA, CD vuông góc với nhau.	X	
b) Góc giữa đường thẳng SB và $(ABCD)$ bằng 60° .		X
c) Côsin của góc nhị diện $[A, SB, C]$ bằng $-\frac{\sqrt{15}}{10}$.		X
d) Đường thẳng $CD \perp (SAD)$.	X	

Lời giải.



Ta có $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = a\sqrt{2}$ và $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{6a^2 - 2a^2} = 2a$.

a) **Đ** Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CD$.

b) **S** Ta có $(SB, (ABCD)) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 45^\circ$ do tam giác SAB vuông cân tại A .

c) **S** Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow AMCD$ là hình vuông cạnh a .

Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của M, A trên SB .

Ta có $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB) \Rightarrow CM \perp SB$.

Mặt khác $MH \perp SB \Rightarrow (CMH) \perp SB$.

Suy ra $[A, SB, C] = \widehat{MHC}$.

Vì tam giác SAB vuông cân tại A , $SA = AB = 2a$ nên $AK = \frac{1}{2}SB = a\sqrt{2} \Rightarrow MH = \frac{1}{2}AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác CMH vuông tại $M \Rightarrow CH = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

và $\cos \widehat{CHM} = \frac{MH}{CH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) **Đ** Ta có $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Chọn đáp án

a đúng	b sai	c sai	d đúng
--------	-------	-------	--------

 \square

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 5.

Câu 1. Để thử nghiệm tác dụng điều trị bệnh trào ngược dạ dày của hai loại thuốc X và Y, người ta tiến hành thử nghiệm trên 2000 người bệnh tình nguyện. Kết quả được cho trong bảng thống kê sau

Kết quả \ Dùng thuốc	X	Y
Khỏi bệnh	600	800
Không khỏi bệnh	200	400

Chọn ngẫu nhiên một người bệnh tham gia thử nghiệm thuốc. Tính xác suất để người đó khỏi bệnh biết người đó sử dụng thuốc X (kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Đáp án:

0	,	7	5
---	---	---	---

Lời giải.

Không gian mẫu $n(\Omega) = 2000$.

Gọi biến cố A : “Người đó khỏi bệnh”, B : “Người đó uống thuốc X”.

Ta có AB : “Người đó uống thuốc X và khỏi bệnh”.

Ta có $n(AB) = 600$, $n(B) = 600 + 200 = 800$. Để tính xác suất để người đó khỏi bệnh biết người đó sử dụng thuốc X, ta tính $P(A | B)$.

$$\text{Ta có } P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{600}{800} = 0,75.$$

Đáp án:

0,75

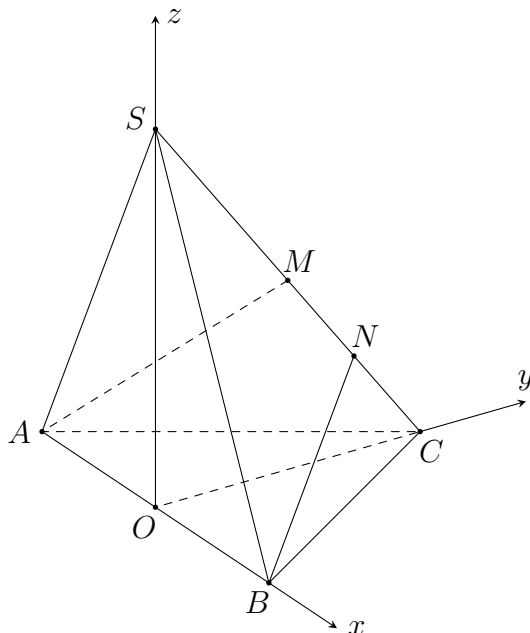
 □

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2\sqrt{3}$, mặt bên (SAB) là tam giác cân với $\widehat{ASB} = 120^\circ$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC và N là trung điểm của MC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM , BN (làm tròn đến số thập phân thứ hai).

Đáp án:

0	,	3	9
---	---	---	---

Lời giải.



Gọi O là trung điểm AB , $\triangle SAB$ cân tại $S \Rightarrow SO \perp AB$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \Rightarrow SO \perp (ABC). \\ SO \perp AB \end{cases}$$

Xét $\triangle SOB$ vuông tại O có $\widehat{OSB} = 60^\circ$.

$$\Rightarrow \tan \widehat{OSB} = \frac{OB}{SO} \Rightarrow SO = \frac{OB}{\tan \widehat{OSB}} = \frac{\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = 1.$$

Ta có OC là đường cao của tam giác đều ABC cạnh $2\sqrt{3}$ nên $OC = 3$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Khi đó ta có $O(0; 0; 0)$, $B(\sqrt{3}; 0; 0)$, $A(-\sqrt{3}; 0; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $S(0; 0; 1)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2\sqrt{3}; 0; 0).$$

M là trung điểm SC nên M có tọa độ $\left(0; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

N là trung điểm MC nên N có tọa độ $\left(0; \frac{9}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

AM có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AM} = \left(\sqrt{3}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ hay $\vec{a} = (2\sqrt{3}; 3; 1)$.

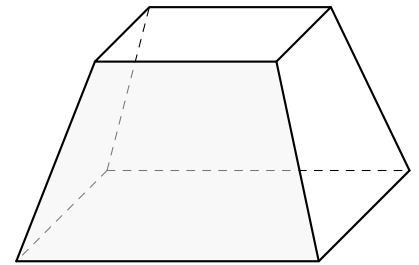
BN có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{BN} = \left(-\sqrt{3}; \frac{9}{4}; \frac{1}{4}\right)$ hay $\vec{b} = (-4\sqrt{3}; 9; 1)$.

$$\text{Ta có } [\vec{a}, \vec{b}] = (-6; -6\sqrt{3}; 30\sqrt{3}).$$

$$\text{Vậy } d(AM; BN) = \frac{|[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \overrightarrow{AB}|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|} = \frac{2\sqrt{237}}{79}.$$

Đáp án: 0,39 □

Câu 3. Một khối gỗ có dạng hình chóp cụt đều, hai đáy là hình vuông có cạnh lần lượt là 5 cm và 3 cm, chiều cao của khối là 2,5 cm (xem hình). Người ta dùng một mặt phẳng song song với hai đáy để cắt bỏ phần trên của khối, sao cho thể tích phần còn lại đúng bằng một nửa thể tích khối ban đầu. Gọi h (cm) là chiều cao phần bị cắt đi. Hãy tính giá trị của h (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Đáp án: 1 , 5 4

Lời giải.

Mở rộng các cạnh bên của hình chóp cụt để tạo thành hình chóp đều đỉnh S . Gọi h_1 là chiều cao của hình chóp nhỏ (có đáy là hình vuông cạnh 3 cm). Gọi h_2 là chiều cao của hình chóp lớn (có đáy là hình vuông cạnh 5 cm). Theo định lý Ta-lét, tỉ số chiều cao bằng tỉ số cạnh đáy tương ứng:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5h_1 = 3h_2.$$

Mặt khác, chiều cao của khối chóp cụt là 2,5 cm nên $h_2 - h_1 = 2,5$.

Giải hệ phương trình trên ta được: $h_1 = 3,75$ cm và $h_2 = 6,25$ cm.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối chóp nhỏ (đỉnh S , đáy 3) và khối chóp lớn (đỉnh S , đáy 5). Gọi mặt phẳng cắt nằm cách đỉnh S một khoảng h_x , tạo thành khối chóp có thể tích V_x . Phần bị cắt đi là một khối chóp cụt (giới hạn bởi đáy 3 và mặt cắt), có thể tích là $V_{\text{cắt}} = V_x - V_1$.

Thể tích khối chóp cụt ban đầu là $V = V_2 - V_1$. Theo đề bài, thể tích phần còn lại bằng một nửa thể tích khối ban đầu, nghĩa là thể tích phần bị cắt đi cũng bằng một nửa thể tích khối ban đầu:

$$V_{\text{cắt}} = \frac{1}{2}V \Leftrightarrow V_x - V_1 = \frac{1}{2}(V_2 - V_1) \Leftrightarrow V_x = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Ta có tỉ số thể tích của hai khối chóp đồng dạng bằng lập phương tỉ số đồng dạng:

$$\frac{V_x}{V_2} = \left(\frac{h_x}{h_2}\right)^3 \quad \text{và} \quad \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}.$$

Từ biểu thức $V_x = \frac{V_1 + V_2}{2}$, chia hai vế cho V_2 ta được:

$$\frac{V_x}{V_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{V_1}{V_2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{27}{125} + 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{152}{125} = \frac{76}{125}.$$

Suy ra:

$$\left(\frac{h_x}{h_2} \right)^3 = \frac{76}{125} \Rightarrow h_x = h_2 \cdot \sqrt[3]{\frac{76}{125}} = 6,25 \cdot \frac{\sqrt[3]{76}}{5} = 1,25 \cdot \sqrt[3]{76} \approx 5,294 \text{ cm}.$$

Chiều cao h của phần bị cắt đi chính là khoảng cách từ đáy trên (cũ) đến mặt phẳng cắt:

$$h = h_x - h_1 \approx 5,294 - 3,75 = 1,544 \text{ cm}.$$

Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm, ta được $h \approx 1,54 \text{ cm}$.

Đáp án: 1,54 □

Câu 4. Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tính tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng.

Đáp án: 2 0

Lời giải.

Gọi x (lít) ($0 < x < 10$) là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.

Khi đó $10 - x$ (lít) là số xăng Bình sử dụng trong 1 ngày.

Suy ra $f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x}$, $x \in (0; 10)$ là tổng số ngày An và Bình sử dụng hết số xăng được khoán.

Xét hàm số $f(x)$ ta có $f'(x) = -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -20 \notin (0; 10). \end{cases}$$

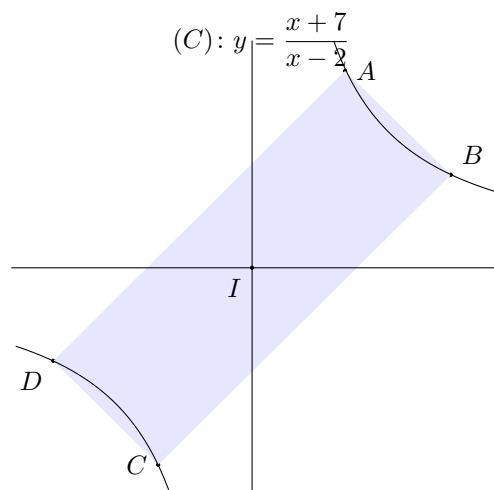
Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x}$, $x \in (0; 10)$

x	0	4	10
$f'(x)$		– 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow 20 \nearrow	$+\infty$

Dựa vào BBT ta có sau ít nhất 20 ngày thì An và Bình sử dụng hết lượng xăng được khoán.

Đáp án: 20 □

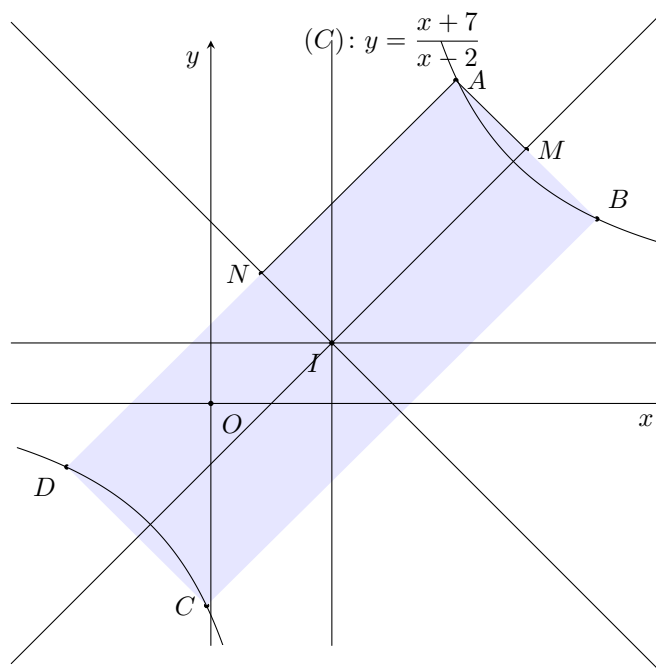
Câu 5. Trên một hồ nước có hai mô đất mà hai bờ gần nhau của chúng có dạng đường hypebol. Bác An là chủ thầu của hồ nước, bác dự định quây một ô hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 30 m^2 bằng lưới như hình vẽ để nuôi một loại cá, các mô đất giới hạn bởi các cạnh AB và CD với các bờ sẽ được đào đi để tạo thành một hình chữ nhật hoàn chỉnh $ABCD$. Sau khi tiến hành gắn hệ trục tọa độ Oxy thì bác An xác định gần đúng hai bờ đất là hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{x+7}{x-2}$. Hãy xác định chiều dài của tấm lưới quây mà bác An cần cho công việc theo đơn vị mét (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x+7}{x-2}$ có các đường tiệm cận đứng là $x = 2$, tiệm cận ngang $y = 1$ nên đồ thị nhận điểm $I(2; 1)$ làm tâm đối xứng.

Đồng thời, phân giác của các góc tạo bởi các đường tiệm cận của đồ thị là $d_1: y = x - 1$, $d_2: y = -x + 3$ là các trục đối xứng của đồ thị.



Gọi $A\left(x; \frac{x+7}{x-2}\right) \in (C) \ (x > 2)$.

Theo tính chất đối xứng, suy ra I cũng là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, d_1, d_2 lần lượt là đường trung trực của AB, AD .

- Khoảng cách $d(A, d_1) = \frac{\left|x - \frac{x+7}{x-2} - 1\right|}{\sqrt{2}} = \frac{|x^2 - 4x - 5|}{\sqrt{2}|x-2|}$;

- Khoảng cách $d(A, d_2) = \frac{\left|x + \frac{x+7}{x-2} - 3\right|}{\sqrt{2}} = \frac{|x^2 - 4x + 13|}{\sqrt{2}|x-2|}$.

Gọi M, N là trung điểm của AB, AD thì $S_{ABCD} = 4S_{AMIN} = 30$, hay

$$\begin{aligned}
 4AM \cdot AN = 30 &\Leftrightarrow 4d(A, d_1) \cdot d(A, d_2) = 30 \\
 &\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{|x^2 - 4x - 5|}{\sqrt{2}|x-2|} \cdot \frac{|x^2 - 4x + 13|}{\sqrt{2}|x-2|} = 30 \\
 &\Leftrightarrow |x^2 - 4x - 5| \cdot |x^2 - 4x + 13| = 15(x-2)^2 \\
 &\Leftrightarrow |x^2 - 4x - 5| \cdot |x^2 - 4x + 13| = 15(x^2 - 4x + 4) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 4x - 5)(x^2 - 4x + 13) = 15(x^2 - 4x + 4) \\ (x^2 - 4x - 5)(x^2 - 4x + 13) = -15(x^2 - 4x + 4) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 - 4x, t \geq -4$, ta được

$$\begin{cases} (t-5)(t+13) = 15(t+4) & (1) \\ (t-5)(t+13) = -15(t+4) & (2) \end{cases}$$

• Giải (1) ta được
$$\begin{cases} t = \frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{61}}{2} \text{ (loại)} \\ t = \frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{61}}{2} \end{cases}$$

Với $t = \frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{61}}{2}$ thì $x^2 - 4x = \frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{61}}{2}$.

Giải ra ta được
$$\begin{cases} x \approx 6,38 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow y \approx 3,05 \\ x \approx -2,38 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

• Giải (2) ta được
$$\begin{cases} t = -\frac{23}{2} - \frac{3\sqrt{61}}{2} \text{ (loại)} \\ t = \frac{3\sqrt{61}}{2} - \frac{23}{2} \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$$

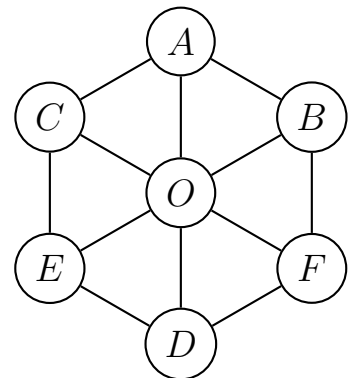
Với $t = \frac{3\sqrt{61}}{2} - \frac{23}{2}$ thì $x^2 - 4x = \frac{3\sqrt{61}}{2} - \frac{23}{2}$.

Giải ra ta được
$$\begin{cases} x \approx 4,05 \text{ (thỏa)} \Rightarrow y \approx 5,38 \\ x \approx -0,05 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Suy ra chiều dài của hồ nước là $2d(A, d_2) \approx 9,1$.

Đáp án: 9,1 □

Câu 6. Một nhóm mật mã học đưa ra thử thách “Bánh xe số”. Người chơi cần chọn ra 7 số phân biệt từ tập hợp $S = \{1; 2; 3; \dots; 9\}$ và xếp vào 7 ô tròn gồm một ô tâm O và sáu ô A, B, C, D, E, F xung quanh như hình vẽ. Mật mã được mở nếu ba bộ ba số nằm trên ba đường chéo đi qua tâm là (A, O, D) , (B, O, E) , (C, O, F) đều lập thành cấp số cộng theo thứ tự đó. Giả sử người chơi chọn ngẫu nhiên 7 số từ tập S và xếp ngẫu nhiên vào các vị trí. Gọi a là xác suất để mật mã được mở. Giá trị của $\frac{1}{a}$ bằng bao nhiêu?



Đáp án: 6 3 0

Lời giải.

Số phần tử của tập hợp S là 9.

Không gian mẫu là số cách chọn 7 số từ 9 số và xếp vào 7 vị trí phân biệt.

$$n(\Omega) = A_9^7 = 181\,440.$$

Gọi biến cố K : “Mật mã được mở”.

Theo giả thiết, các bộ ba trên đường chéo lập thành cấp số cộng, suy ra số ở tâm O là trung bình cộng của hai số ở hai đầu mút:

$$\begin{cases} A + D = 2O \\ B + E = 2O \\ C + F = 2O. \end{cases}$$

Điều này dẫn đến các hệ quả:

- Tổng 7 số được chọn là $\Sigma = (A + D) + (B + E) + (C + F) + O = 2O + 2O + 2O + O = 7O$.
- Để chọn được đủ 3 cặp số (A, D) , (B, E) , (C, F) đôi một phân biệt và khác O sao cho tổng mỗi cặp bằng $2O$, ta cần kiểm tra số lượng các cặp có tổng bằng hằng số trong tập S .

Ta biện luận theo giá trị của tâm O ($O \in S$):

- **Trường hợp 1:** $O = 5$. Tổng mỗi cặp phải là $2O = 10$. Trong tập $S \setminus \{5\}$, các cặp có tổng bằng 10 là: $\{1; 9\}, \{2; 8\}, \{3; 7\}, \{4; 6\}$. Có tất cả 4 cặp thỏa mãn. Ta cần chọn ra 3 cặp từ 4 cặp này để xếp vào 3 đường chéo. Số cách chọn số và xếp vị trí:

1. Chọn $O = 5$ đặt vào tâm: 1 cách.
2. Chọn 3 cặp từ 4 cặp: $C_4^3 = 4$ cách.
3. Xếp 3 cặp vào 3 đường chéo (có phân biệt đường AD, BE, CF): $3! = 6$ cách.
4. Hoán vị 2 số trong mỗi cặp (đảo vị trí đầu mút): $2! \cdot 2! \cdot 2! = 8$ cách.

$$\Rightarrow n_1 = 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192 \text{ cách.}$$

- **Trường hợp 2:** $O = 4$. Tổng mỗi cặp phải là $2O = 8$. Trong tập $S \setminus \{4\}$, các cặp có tổng bằng 8 là: $\{1; 7\}, \{2; 6\}, \{3; 5\}$. (Cặp $\{4; 4\}$ loại, cặp $\{0; 8\}$ không có 0). Có đúng 3 cặp thỏa mãn. Ta phải chọn cả 3 cặp này. Số cách chọn số và xếp vị trí:

1. Chọn $O = 4$ đặt vào tâm: 1 cách.
2. Chọn 3 cặp từ 3 cặp: 1 cách.
3. Xếp 3 cặp vào 3 đường chéo: $3! = 6$ cách.
4. Hoán vị các đầu mút: $2^3 = 8$ cách.

$$\Rightarrow n_2 = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 8 = 48 \text{ cách.}$$

- **Trường hợp 3:** $O = 6$. Tổng mỗi cặp phải là $2O = 12$. Trong tập $S \setminus \{6\}$, các cặp có tổng bằng 12 là: $\{3; 9\}, \{4; 8\}, \{5; 7\}$. (Cặp $\{6; 6\}$ loại). Có đúng 3 cặp thỏa mãn. Tương tự trường hợp 2, số cách xếp là: $\Rightarrow n_3 = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 8 = 48$ cách.

- **Các trường hợp khác:**

- Nếu $O = 3$ (tổng cặp bằng 6): Chỉ có $\{1; 5\}, \{2; 4\}$ (2 cặp) \rightarrow Không đủ 3 cặp.
- Nếu $O = 7$ (tổng cặp bằng 14): Chỉ có $\{5; 9\}, \{6; 8\}$ (2 cặp) \rightarrow Không đủ.
- Tương tự với $O = 1, 2, 8, 9$ số lượng cặp càng ít hơn.

Tổng số kết quả thuận lợi: $n(K) = 192 + 48 + 48 = 288$.

Xác suất cần tìm:

$$a = \frac{288}{181\,440} = \frac{1}{630}.$$

Vậy giá trị cần tìm là $\frac{1}{a} = 630$.

Đáp án: 630 □

———— HẾT ————

ĐÁP ÁN PHẦN TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN - MÃ ĐỀ HSG12-3

1. C	2. C	3. D	4. B	5. B	6. A	7. C	8. A	9. A	10. B
11. B	12. B	13. A	14. D	15. B	16. A	17. B	18. C	19. B	20. D

ĐÁP ÁN PHẦN TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI - MÃ ĐỀ HSG12-3

Câu 1. a S b S c S d Đ	Câu 2. a S b Đ c Đ d S	Câu 3. a Đ b Đ c S d S
Câu 4. a Đ b Đ c S d Đ	Câu 5. a S b Đ c Đ d Đ	Câu 6. a Đ b S c S d Đ

ĐÁP ÁN PHẦN TRẢ LỜI NGẮN - MÃ ĐỀ HSG12-3

Câu 1. 0 , 7 5	Câu 2. 0 , 3 9	Câu 3. 1 , 5 4	Câu 4. 2 0	Câu 5. 9 , 1	Câu 6. 6 3 0
-------------------	-------------------	-------------------	---------------	-----------------	-----------------